第 20 講　数列の和と一般項

20 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の条件を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $S_n=n^3+2n^2$

(2) $S_n=2^n+3^n$

(3) $S_n=2a_n+n+1$

(4) $S_n={a_n}^2+\dfrac{n}{4}$,　$a_n>0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立っている．一般項 a_n を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+1$　　㋑　$a_n=2^n$　　㋒　$a_n=3^n-1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　数列の和と一般項

20　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の条件を満たすとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1)　$S_n=n^3+2n^2$

(2)　$S_n=2^n+3^n$

(3)　$S_n=2a_n+n+1$

(4)　$S_n={a_n}^2+\dfrac{n}{4}$,　$a_n>0$

【答】 (1) $a_n=3n^2+n-1$　(2) $a_n=\begin{cases} 2\cdot3^{n-1}+2^{n-1} & (n\geqq2) \\ 5 & (n=1) \end{cases}$　(3) $a_n=1-3\cdot2^{n-1}$

(4) $a_n=\dfrac{1}{2}n$

【解答】

(1)　$S_1=1^3+2\cdot1^2$　　$\therefore$　$a_1=3$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1} \\ &=(n^3+2n^2)-\{(n-1)^3+2(n-1)^2\} \\ &=3n^2+n-1 \end{aligned}$$

ここで $3\cdot1^2+1-1=3$ より，$\boldsymbol{a_n=3n^2+n-1}$　$(n\geqq1)$

(2)　$S_1=2^1+3^1$　　$\therefore$　$a_1=5$

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n&=S_n-S_{n-1} \\ &=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1}) \\ &=2\cdot3^{n-1}+2^{n-1} \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a_n=\begin{cases} 2\cdot3^{n-1}+2^{n-1} & (n\geqq2) \\ 5 & (n=1) \end{cases}}$

(3)　与式より得られる $S_{n+1}=2a_{n+1}+(n+1)+1$ と与式の辺々の差をとると

$$\begin{aligned} &S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}+(n+1)+1\}-(2a_n+n+1) \\ &a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n+1 \\ &a_{n+1}=2a_n-1 \\ &a_{n+1}-1=2(a_n-1) \end{aligned}$$

となるので，$a_n-1=(a_1-1)\cdot2^{n-1}$ となる．

ここで与式に $n=1$ を代入して $S_1=2a_1+1+1$，したがって $a_1=-2$ となるので，

$a_n-1=-3\cdot2^{n-1}$ となる．

よって，$\boldsymbol{a_n=1-3\cdot2^{n-1}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　与式より得られる $S_{n+1}=a_{n+1}{}^2+\dfrac{n+1}{4}$ と与式の辺々の差をとると

$$S_{n+1}-S_n=\left(a_{n+1}{}^2+\frac{n+1}{4}\right)-\left(a_n{}^2+\frac{n}{4}\right)$$

$$a_{n+1}=a_{n+1}{}^2-a_n{}^2+\frac{1}{4}$$

$$\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}\right)^2=a_n{}^2$$

$$a_{n+1}=\pm a_n+\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots①$$

となる．ここで与式に $n=1$ を代入して $S_1=a_1{}^2+\dfrac{1}{4}$ すなわち $\left(a_1-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ より，

$a_1=\dfrac{1}{2}$ を得る．

　$n=k(\geqq 1)$ のとき $a_k\geqq\dfrac{1}{2}$ を仮定すると，$a_{k+1}=\pm a_k+\dfrac{1}{2}$ より $a_{k+1}=-a_k+\dfrac{1}{2}$ ならば $a_{k+1}\leqq 0$ となり $a_n>0$ に反する．また $a_{k+1}=a_k+\dfrac{1}{2}$ ならば $a_{k+1}\geqq\dfrac{1}{2}$ となり，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $a_n\geqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つので，①は $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2}$ となる．

ゆえに　$a_n=a_1+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}n}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　数列の和と一般項

20 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立っている．一般項 a_n を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+1$　　㋑　$a_n=2^n$　　㋒　$a_n=3^n-1$

【答】 ㋒

【解答】

$n=1$ のとき

$$S_1=\frac{3}{2}a_1-1 \qquad \therefore \quad a_1=2$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$a_n=\left(\frac{3}{2}a_n-n\right)-\left\{\frac{3}{2}a_{n-1}-(n-1)\right\}$$

$$a_n=3a_{n-1}+2$$

$$a_n+1=3(a_{n-1}+1)$$

$$a_n+1=(a_1+1)\cdot 3^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n=3^n-1$$

以上より

$$a_n=\begin{cases}3^n-1 & (n\geqq 2)\\ 2 & (n=1)\end{cases} \quad = \quad \mathbf{3^n-1} \quad (n\geqq 1)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。